15 On considère une fonction f dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f(0)=f'(0)=0$ et $f(1)=0$.

Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0, 1]$.

2. a. Montrer qu'il existe un réel c de $]0, 1[$ tel que $cf'(c)-f(c)=0$.

b. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal.
Montrer que $\mathscr{C}$ possède au moins une tangente passant par l'origine du repère.

16 Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y=x^2+ax+b$ dans un repère orthogonal.
Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{P}$, d'abscisses respectives x_A et x_B.

Montrer que $\mathscr{P}$ possède au point d'abscisse $\dfrac{x_A+x_B}{2}$ une tangente parallèle à la droite (AB).

17 Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$.

1. Montrer que si la courbe de f coupe l'axe des abscisses en deux points distincts, alors elle admet au moins une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
2. Montrer que si la courbe de f coupe l'axe des abscisses en n points distincts $(n\geq 2)$, alors elle admet au moins $n-1$ tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

18 Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2-1)^3(x^4-16)^2$.

Montrer que la dérivée f' de f admet au moins trois racines distinctes autres que les réels $-2, -1, 1$ et 2.

19 Soit f une fonction n fois dérivable sur $[a, b]$ et s'annulant pour $n+1$ valeurs distinctes de $[a, b]$ $(n\geq 1)$.

Montrer que sa dérivée $n^{ème}$ s'annule au moins une fois dans $[a, b]$.

20 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0,\\ x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0.\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. a. Montrer que pour tout réel x non nul on a $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leq|x|$.

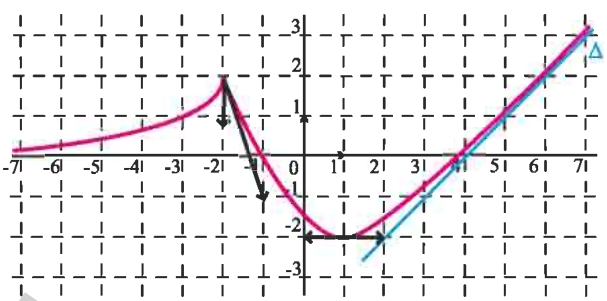
b. En déduire que f est dérivable en 0.
3. a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

b. Soit n un entier naturel non nul.

Calculer $\left|f'\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)\right|$.

c. La fonction f' est-elle continue en 0 ?

21 On a représenté ci-dessous, une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La droite Δ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.



1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer graphiquement,

$$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2},\quad \lim_{x\to(-2)^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2},$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x-1},\quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x+4\right).$$

22 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f: x\mapsto 4x^3+6x-2$.

23 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f: x\mapsto \dfrac{x^3+2x+2}{2x}$

Qarray.tn - Kora Blech - Qarray.tn - Kora Blech - Qarray.tn